En route pour la BCPST

Tout d'abord, nous vous félicitons pour votre baccalauréat et nous vous souhaitons la bienvenue en classe préparatoire BCPST au lycée Thuillier à la rentrée prochaine.

En BCPST, vous aurez trois matières scientifiques principales : la Biologie (et la Géologie), La Physique Chimie et les Mathématiques. Les volumes horaires de cours et de TD (ou TP) dans ces matières sont conséquents. Sachez que celui de mathématiques est le même que celui de biologie, ce qui reflète l'importance de la discipline aux différents concours de la filière que vous avez choisie.

Votre réussite dépendra de votre régularité et de votre investissement. Le programme de BCPST s'inscrit directement dans la continuité du programme de terminale (nul besoin d'avoir suivi l'option mathématiques) et de nombreux points seront revus en détails. La différence majeure est que nous allons vous préparer à des concours très sélectifs et exigeants. Ainsi, un apprentissage approximatif du cours ou des exercices ne sera pas acceptable et ne vous permettra pas de progresser. Vous devrez être assidu dans votre travail, précis dans vos raisonnements et vous aurez à adopter une rédaction concise. Nous serons là bien sûr pour vous guider et vous donner des techniques d'apprentissage efficaces.

Pour aborder votre première année de classe préparatoire, il est primordial de maîtriser parfaitement certaines notions de base. Vous devez notamment vérifier que vous avez les compétences suivantes et les (re)travailler si vous avez des lacunes :

1. savoir gérer un calcul avec des fractions (addition, produit, quotient) ;
2. savoir gérer un calcul avec des puissances ;
3. savoir résoudre une équation du premier ordre ou du second ordre ;
4. savoir représenter les graphes des fonctions usuelles ($x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $x \longmapsto \ln(x)$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$)
5. connaître parfaitement les dérivées et les primitives des fonctions usuelles ;
6. connaître parfaitement les propriétés algébriques du logarithme, de l'exponentielle et de la racine carrée ;
7. savoir tracer une droite d'équation donnée.

Dans la suite de ce fascicule, vous trouverez différents formulaires, que vous aurez à bien connaître et qui ont déjà été vus en terminale. Nous vous proposons ensuite différents petits exercices vous permettant de vous tester. Un corrigé est proposé pour chacun d'entre eux. Vous pourrez voir dans le dernier exercice et le problème la rédaction que nous vous apprendrons et que nous exigerons l'année prochaine.

Prenez un peu de temps cet été pour vous exercer et consolider vos éventuelles lacunes, cela vous permettra de faire un démarrage serein en classe préparatoire. Nous serons à votre disposition dès la rentrée pour répondre à toutes les interrogations et revoir les difficultés que vous avez pu rencontrer.

Bonnes vacances !

Aymeric Maury et Vianney Réal

Formulaire de dérivation

expression de f	**domaine de définition**	**domaine de dérivation**	**expression de f'**
$f(x) = C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$

Formulaire des formes particulières de dérivées

Dans le tableau ci-dessous u, v et g désignent des fonctions, a et b des réels et n un entier.

expression de f	**expression de f'**
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$
$f(x) = g(ax+b)$	$f'(x) = ag'(ax+b)$

Formulaire de primitives

Dans ce tableau n désigne un entier différent de -1.

expression de f	**UNE primitive F**
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert)$
$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$

Formulaire des formes particulières de primitives

Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction et n un entier différent de -1.

expression de f	**une primitive F**
$f(x) = u'(x)(u(x))^n$	$F(x) = \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$F(x) = \mathrm{e}^{u(x))}$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln(\lvert u(x)\rvert)$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = \sqrt{u(x)}$

Règles de calcul avec les fractions :				
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$		
Règles de calcul sur les puissances :				
$a^m\times a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$(a^m)^n=a^{m\times n}$	$a^nb^n=(ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
Règles de calcul avec les racines carrées :				
$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt{a})^2=a$	mais	$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$
Règles de calcul avec les logarithmes :				
$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$	$\ln(a^n)=n\ln(a)$	$\ln(1)=0$	$\ln(e)=1$
Règles de calcul avec les exponentielles :				
$\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b=\mathrm{e}^{a+b}$	$\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}=\mathrm{e}^{a-b}$	$\mathrm{e}^{-a}=\frac{1}{\mathrm{e}^a}$	$\mathrm{e}^0=1$	

Attention : On ne peut pas écrire n'importe quoi ! Voici quelques grosses erreurs classiques...

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$
$\ln(a+b)\neq\ln(a)+\ln(b)$
$\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b\neq\mathrm{e}^{a+b}$
$\frac{1}{a+b}\neq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
etc...

Exercices

Exercice 1. Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur le domaine D indiqué :

1. $f : x \longmapsto x^5 + \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + x - 1$ sur $D = \mathbb{R}$;
2. $f : x \longmapsto (3x-1)\sqrt{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$;
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+2}$ sur $D =]-\infty, -2[$;
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{x+2}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;
5. $f : x \longmapsto (2x^2+x-1)^4$ sur $D = \mathbb{R}$;
6. $f : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ sur $D = \mathbb{R}^*$;
7. $f : x \longmapsto \left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^3$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
8. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;
9. (Sans corrigé) $f : x \longmapsto \ln(x^2+1)$ sur $D = \mathbb{R}$;

Exercice 2. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué :

1. $f : x \longmapsto x^4 - 4x^3 + 2x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$;
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-3x+3}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$;
3. $f : x \longmapsto \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$;
4. $f : x \longmapsto (x+2)^3$ sur $I = \mathbb{R}$;
5. $f : x \longmapsto 2x(3x^2-1)^4$ sur $I = \mathbb{R}$;
6. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-4}$ sur $I =]4, +\infty[$;
7. $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x}$ sur $I =]0, 1[$;
8. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(3x-1)^2}$ sur $I =]1/3, +\infty[$;
9. $f : x \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$ sur $I =]-1/2, +\infty[$;
10. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$;
11. $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$;
12. $f : x \longmapsto \cos(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
13. (sans corrigé) $f : x \longmapsto \sin(5x) + 1 + \tan(x)^2 + 3x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Factoriser $A = (2x^2 - 4x + 2) + (x^2 - 1)$.
2. Simplifier les fractions suivantes avec x un réel tel que les dénominateurs ne s'annulent pas : $\dfrac{-4x^5 - 8x^6}{-4x^5 - 2x^3}$, $\dfrac{7x^3 + 21x^2}{7x^3 + 9x^2}$ et $\dfrac{x^2 + 9 - 6x}{x^2 - 9}$.
3. Déterminer les racines des fonction polynômes suivantes définies sur $\mathbb{C}$ et factoriser les : $x \mapsto x^2 + 3x + 2$, $x \mapsto 2x^2 - 3x - 1$ et $x \mapsto x^2 + 4x + 5$.

4. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les équations suivantes : $5x+2=-2x+3$, $x^2-7=0$ et $x^5-3x^3=0$.
5. Déterminer α tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\dfrac{2x+9}{x+2}=2+\dfrac{\alpha}{x+2}$.
6. On munit le plan d'un repère cartésien. Pour chacune des questions suivantes, déterminer une équation de la droite :
   (a) dont le coefficient directeur est 3 et passant par le point $A(1,-2)$,
   (b) passant par les points $B(-2,3)$ et $C(-5,-7)$,
   (c) passant par le point $D(-3,4)$ parallèle à l'axe des ordonnées.
   (d) passant par le point $D(-3,4)$ parallèle à l'axe des abscisses.
7. Simplifier les expressions suivantes :

$$\left(\mathrm{e}^{2x+3}\right)^{-3} \times \left(\mathrm{e}^{3x-1}\right)^{-2} \qquad \left(\mathrm{e}^{\pi x}+\mathrm{e}^{-\pi x}\right)^2-\left(\mathrm{e}^{\pi x}-\mathrm{e}^{-\pi x}\right)^2 \qquad \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}}$$

8. Simplifier au maximum :

$$\ln(a+b)+\ln(a-b)-\ln(a^2-b^2) \qquad \ln\left(\frac{25\sqrt{5}}{9}\right) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right)+\ln(a^4)-\ln(a^3)+\ln(1)$$

9. Déterminer le domaine de définition des fonctions f et g dont les expressions sont les suivantes :

$$f(x)=\ln(x^2+2x) \qquad \text{et} \qquad g(x)=\sqrt{\left(\frac{x+2}{1-x}\right)}$$

10. (sans corrigé) Déterminer le domaine de définition de la fonction h définie par

$$h(x)=\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 4 (récurrence). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}=u_n+n$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Problème.

On considère la fonction f d'expression

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : étude des limites de f

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. (a) Vérifier que pour tout nombre réel x, on a l'égalité

$$f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}+\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$$

   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On admet que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

Partie B : étude des variations de f et construction de $\mathcal{C}$

On considère la fonction g d'expression

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$$

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. (a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.
3. (a) Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g\big(\mathrm{e}^{x}\big)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Corrigés

Exercice 1.

1. $f'(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x + 1$
2. $f'(x) = \dfrac{9x - 1}{2\sqrt{x}}$
3. $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$
4. $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$
5. $f'(x) = 4(4x+1) \times (2x^2 + x - 1)^3$
6. $f'(x) = \dfrac{\pi}{x^2} \sin(\dfrac{\pi}{x})$
7. $f'(x) = \dfrac{3(3x-4)^2}{(x-1)^4}$
8. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Exercice 2.

1. $F(x) = \dfrac{x^5}{5} - x^4 + x^2 + x$
2. $F(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{3x}{2}$
3. $F(x) = \dfrac{-4}{x} - \ln(|x|)$
4. $F(x) = \dfrac{(x+2)^4}{4}$
5. $F(x) = \dfrac{(3x^2 - 1)^5}{15}$
6. $F(x) = \ln(|x - 4|)$
7. $F(x) = \ln(|x^2 - x|)$
8. $F(x) = \dfrac{-1}{3(3x-1)}$
9. $F(x) = 2\sqrt{2x+1}$
10. $F(x) = -\,\mathrm{e}^{-x+1}$
11. $F(x) = \dfrac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$
12. $F(x) = \dfrac{1}{3}\sin(3x)$

Exercice 3.

1. $A = 2(x-1)^2 + (x-1)(x+1) = (x-1)(3x-1)$ (pensez aux identités remarquables)
2. $\dfrac{-4x^5 - 8x^6}{-4x^5 - 2x^3} = \dfrac{-2x^3(2x^2 + 4x^3)}{-2x^3(2x^2+1)} = \dfrac{2x^2 + 4x^3}{2x^2 + 1}$,
   $\dfrac{7x^3 + 21x^2}{7x^3 + 9x^2} = \dfrac{7x + 21}{7x + 9}$
   et $\dfrac{x^2 + 9 - 6x}{x^2 - 9} = \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{x-3}{x+3}$ (pensez aux identités remarquables)

3. Pour $x \mapsto x^2+3x+2$ le discriminant est $\Delta = 1$ et les racines sont -1 et -2. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$.

   Pour $x \mapsto 2x^2-3x-1$ le discriminant est $\Delta = 17$ donc les racines sont $\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $2x^2+3x+2 = 2\left(x-\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$.

   Pour $x \mapsto x^2+4x+5$ le discriminant est $\Delta = -4$. La fonction polynôme admet deux racines complexes : $\dfrac{-4+2i}{2} = -2+i$ et $\dfrac{-4-2i}{2} = -2-i$. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x^2+4x+5 = (x+2-i)(x+2+i)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $5x+2 = -2x+3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$. Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{1}{7}\right\}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2-7 = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$. Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right\}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^5 - 3x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\dfrac{2x+9}{x+2} = 2 + \dfrac{\alpha}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{2x+9}{x+2} = \dfrac{2x+4+\alpha}{x+2}$. On prend $\alpha = 5$.

6. (a) Une équation de la droite est $y = 3(x-1)-2$, c'est à dire $y = 3x-5$.

   (b) La droite passe par les points $B(-2,3)$ et $C(-5,-7)$. On peut calculer son coefficient directeur a :
   $$a = \frac{-7-3}{-5-(-2)} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}.$$
   On sait donc qu'une équation de la droite est de la forme $y = \dfrac{10}{3}x + b$ avec $b \in \mathbb{R}$. B appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation, donc :
   $$3 = \frac{10}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{20}{3} \Leftrightarrow b = \frac{29}{3}.$$
   Une équation de la droite est donc $y = \dfrac{10}{3}x + \dfrac{29}{3}$

   D'autres méthodes étaient possibles, utilisation du critère de colinéarité analytique notamment.

   (c) Une équation de la droite est $x = -3$.

   (d) Une équation de la droite est $y = 4$.

7. $\left(\mathrm{e}^{2x+3}\right)^{-3} \times \left(\mathrm{e}^{3x-1}\right)^{-2} = \mathrm{e}^{-12x-7}$

   $\left(\mathrm{e}^{\pi x} + \mathrm{e}^{-\pi x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{\pi x} - \mathrm{e}^{-\pi x}\right)^2 = 4$

   $\dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}} = 1 + \mathrm{e}^{-2x}$

8. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln(a^2-b^2) = 0$ (pensez encore aux identités remarquables et aux règles de calcul sur les logarithmes)

   $\ln\left(\dfrac{25\sqrt{5}}{9}\right) = \dfrac{5}{2}\ln(5) - 2\ln(3)$

   $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln(a^4) - \ln(a^3) + \ln(1) = 0$

9. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
   $$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff x^2+2x > 0 \qquad \text{car } \mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^* \\ &\iff x(x+2) > 0 \end{aligned}$$
   On élabore le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_g &\iff \frac{x+2}{1-x} \geq 0 \quad \text{et } 1-x \neq 0 \quad \text{car } \mathcal{D}_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_+ \\ &\iff \frac{x+2}{1-x} \geq 0 \quad \text{et } x \neq 1 \end{aligned}$$

On élabore le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+2}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On obtient $\mathcal{D}_g = [-2, 1[$.

Exercice 4. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ». Montrons que pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple.

- ⋆ **Initialisation :** Montrons que la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie. D'une part, $u_0 = 0$ (énoncé) et $\dfrac{0 \times (0-1)}{2} = 0$ donc on a l'égalité. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- ⋆ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé). On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Par hypothèse, on a $u_{n+1} = u_n + n$ et comme $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Par conséquent,

$$u_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}$$

  Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- ⋆ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{n(n-1)}{2}}$$

Problème.

Partie A : étude des limites de f

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff 1 + \mathrm{e}^x > 0 \qquad \text{car } \mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \mathrm{e}^x > -1 \qquad \text{ce qui est toujours vrai car } \mathrm{e}^x > 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En factorisant par e^x à l'intérieur du logarithme, il vient :

$$\begin{aligned} f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln\big(\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x} + 1)\big) &= \mathrm{e}^{-x}\big(\underbrace{\ln(\mathrm{e}^x)}_{=x} + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})\big) \\ &= x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \end{aligned}$$

et comme $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})}$$

(b) On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ (croissances comparées). De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} \ln(1 + y) = \ln(1) = 0$. D'après le théorème concernant la limite d'une fonction composée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = 0 \times 0 = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \dfrac{\ln(1 + \mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$. Or, quand x tend vers $-\infty$, $h = \mathrm{e}^x$ tend vers 0. En utilisant le théorème concernant la limite d'une fonction composée, on a donc $\lim\limits_{x \to \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1 + h)}{h} = 1$ d'après le rappel de l'énoncé. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1}$$

4. Conséquences graphiques :

> la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes horizontales, la droite d'équation $y = 1$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Partie B : étude des variations de f et construction de $\mathcal{C}$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} t \in \mathcal{D}_g &\iff 1 + t \neq 0 \text{ et } 1 + t > 0 \qquad \text{car } \mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^* \\ &\iff t \neq -1 \text{ et } t > -1 \\ &\iff t > -1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_g =]-1, +\infty[}$.

2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour démontrer que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée. Pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{1}{(1 + t)^2} - \frac{1}{1 + t} = -\frac{t}{(1 + t)^2}$$

Ainsi, $g'(0) = 0$ et pour tout $t > 0$, on a $g'(t) < 0$. On en conclut donc bien que :

> la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$

(b) La fonction g étant strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on sait en particulier que pour tout $t > 0$, $g(t) < g(0)$ et donc $g(t) < 0$ (puisque $g(0) = 0$). Ainsi,

$$\boxed{\forall t > 0, \qquad g(t) < 0}$$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables et pour tout nombre réel x, on a

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{e}^{-x}\,\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{-x}\Bigg(\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}} - \ln(1+\mathrm{e}^{-x})}_{=g(\mathrm{e}^{x})}\Bigg)$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(\mathrm{e}^{x})}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{e}^{x} \in]0, +\infty[$, on a $g(\mathrm{e}^{x}) < 0$ (car la fonction g est strictement négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$ d'après la question 2. (b)). De plus, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(\mathrm{e}^{x}) < 0$. Il s'ensuit donc que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$$

En reprenant les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$ obtenues aux questions 2. (b) et 3. de la **Partie A**, on obtient le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	1 ↘	0

4. **Graphe $\mathcal{C}$ de la fonction f** (pour gagner de la place, l'unité graphique n'est pas respectée dans le corrigé) :